CADEIAS DE MARKOV - TRABALHO 1

Willian Meira Schlichta - GRR20159077

5 de agosto de 2020

Exercícios 1, 3, 4, 8, 12. Entregar até o dia 12/08/20. 10/08/20. Exercícios.

**Exercício 01** Encontre as matrizes , , e para uma Cadeia de Markov com matriz de probabilidades de transição

. Faça o mesmo se a matriz de transição fosse

. . Interprete o que acontece em cada um destes processos.

Para a 1ª matriz de transição, quando realizamos a potência dela observamos a mesma matriz, ou seja: Γ=Γ2=Γ3=⋯=Γ^n Também, uma vez em um dos 2 estados, ficará no mesmo estado independentemente do número de repetições.

Para a 2ª matriz de transição, observamos que: Γ=Γ3=Γ5=⋯=Γ^n (Caso n ímpar) No caso de n ímpar, na próxima repetição alterará com probabilidade = 1 para o outro estado. Γ2=Γ4=⋯=Γ^n (Caso n par). Nesse caso, se n for par ela se comporta igual a 1ª matriz (permanece no mesmo estado na próxima repetição).

TRANSFORMAR MATRIZ num objeto MARKOVCHAin

g1 <- matrix(c(1,0,0,1), ncol=2) g1 g1%%g1%%g1

g2 <- matrix(c(0,1,1,0), ncol=2);g2 #g2^2 g2%*%g2 #g23 g2%%g2%%g2 #g24 g2%%g2%%g2%*%g2

library(markovchain)

estados = c(“Estado 1”,“Estado 2”)

Prob.T1=matrix(c(1,0,0,1),nrow=2, ncol=2,byrow=T, dimnames=list(estados,estados))

ProbT1 = new(“markovchain”, states=estados, transitionMatrix=Prob.T1, name=“Matriz Gama”)

ProbT1

ProbT1^2

ProbT1^3

ProbT1^4

Prob.T2=matrix(c(0,1,1,0),nrow=2, ncol=2,byrow=T, dimnames=list(estados,estados))

ProbT2 = new(“markovchain”, states=estados, transitionMatrix=Prob.T2, name=“Fila de servidor único”)

ProbT2

ProbT2^2

ProbT2^3

ProbT2^4

ProbT2^5

ProbT2^6

ProbT2^7

Nesse caso a matriz de transição tem distribuição estacionária e a matriz de transição tem distribuição

**Exercício 03** Seja uma Cadeia de Markov com dois estados. (a) Encontre (b) Encontre

Teorema 2 Definição 11

**Exercício 04** Considere a Cadeia de Markov com estados e matriz de probabilidades de transição

Ver exemplo

Encontre as probabilidadaes P(C16=2|C0=0) e P(C12=2,C16=2|C0=0).

**Exercício 08** Mostre que se, e somente se, para algum inteiro positivo .

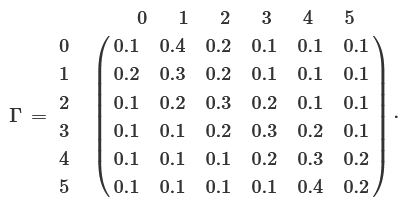
pela Definição 12, é a probabilidade de chegar em e atinja num tempo finito. Se , então . Logo, . Suponha agora que , então vamos provar que pelo Teorema 8.

,

**Exercício 12** Para cada uma das seguintes matrizes de transição, encontrar as cinco primeiras potências da matriz. Em seguida, encontrar a probabilidade de que o estado 2 mude para o estado 4 após 5 repetições do experimento.

(a)$Γ=(0.10.20.20.30.10.20.10.10.10.30.20.10.40.10.10.30.20.20.20.10.20.40.10.30.4)  
(b)$Γ=(0.30.40.10.20.10.20.20.30.10.10.30.10.20.30.40.10.20.20.20.20.10.10.20.20.2)

**Exercício 01**.Uma matriz de transição para o número de linhas telefónicas ocupadas. Suponha que o número de linhas usadas nos tempos 1, 2, … formem uma Cadeia de Markov com matriz de probabilidades de transição estacionária. Essa cadeia possui seis estados possíveis 0, 1, …, 5, onde é o estado no qual exatamente linhas estão sendo usadas em um determinado momento (i=0,1,⋯,5). Suponha que a matriz de transição Γ seja a seguinte:



1. Supondo que todas as cinco linhas estejam em uso em um determinado momento de observação, determinar a probabilidade de que exatamente quatro linhas serão usadas no próximo tempo de observação.
2. Supondo que nenhuma linha esteja em uso em um determinado momento, determinar a probabilidade de que pelo menos uma linha esteja em uso no próximo momento de observação.

**Exercício 02**. Mostre que o seguinte processo auto-regressivo é um processo Markov: , e , onde são variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas.

onde são variáveis aleatórias

De

Observamos que:

Da fórmula de Bayez temos que P(A/B)= = P(A)

Então:

Como as variáveis são independentes, a equação acima pode reescrita como:

Como dependem somente do instante anterior, é uma cadeia de Markov

**Exercício 05**. Seja {} a sequência de médias amostrais calculadas a partir de , uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, isto é, ⋅

1. É {} um processo de Markov?

Sim.

\*

\*\*

em que

Com isso temos que:

Logo temos que:

1. Se a resposta à primeira parte é sim, encontrar a probabilidade de transição .

dado que temos:

Então:

sendo

**Exercício 19**. Seja {} uma Cadeia de Markov. Mostre que ⋅

Para demonstrar, utilizaremos a notação de probabilidade condicional:

Assim verificamos que tendo informação do estado atual, os estados passados não influem no próximo instante.